ネットワーク空間上の施設利用者分布が多項式で表される場合における空間的相互作用モデルによる施設需要推定
Spatial-interaction-model-based estimation of the demand for a facility when the distribution of facility users in a network space is represented by polynomials

増山　篤*
Atsushi Masuyama

This paper derives an analytical expression of the estimation of the demand for a facility under the following conditions: (i) the behavior of facility users follows an origin-constrained spatial interaction model, and (ii) the distribution of facility users in a network space is represented by polynomials. We demonstrate that a part of integrand in the definite integral representing the estimation for a facility can be represented by the infinite series of exponential functions and that the analytical expression of the demand is derived based on the infinite series. We then conclude with suggestions for a future study.
Keywords: estimation of the demand for a facility, spatial interaction model, network space
施設需要推定、空間的相互作用モデル、ネットワーク空間

1. はじめに

身の回りに複数の施設が存在するとき、私たちはしばしば、それら施設を確率的に選択し、利用する。こうした施設利用行動を表現するモデルはいくつかあるが、そうしたモデルは、およそ次のような構造を持つ。第一に、どの施設についても魅力度と言うべき属性があり、魅力度が高い施設ほど高い確率で選択される。第二に、施設と利用者間の距離が大きいほど、その施設を選択する確率は低くなる。

施設利用者の確率的選択行動を表すモデルが決まり、利用者の空間分布が分かれば、施設に対する需要が推定されうる。まずは、利用者が存在するあらゆる場所から施設までの距離を求め、その距離から各場所における施設選択確率を計算する。そして、各場所における選択確率と利用者数（あるいは、利用者密度）を乗じ、利用者が分布している領域全体に渡って合計すればよい。

ここで、利用者と施設の間の距離はどのように測られるべきかを考えよう。まず、私たちの移動行動はほぼ道路ネットワークによって規定されている。また、地点間の移動において、意図的な回り道をすることはそうそうない。これらのことから、利用者と施設の間の距離は、ネットワークに沿って測った最短距離（以下、ネットワーク距離）とするのが妥当だろう。

奥貫ら [1] では、ネットワーク距離を変数とするモデルにしたがって（利用者の）施設選択確率が決まり、また、ネットワーク上に施設利用者が（区分的に）一様に分布しているとしたときの施設需要推定法を示している。まず、施設需要の大きさを積分式によって表す。そして、ネットワークにおいて利用者密度が区分的に一様ならば、施設需要の大きさを表す積分式が展開できることを示している。この展開された式に各種値を代入することで、施設需要の推定値が得られることになる。

ただし、ネットワーク上の利用者分布が一様でない場合については、積分式を展開していない。もし、利用者分布が多項式で与えられるならば、被積分関数の一部を多項式へとテーラー展開することで、被積分関数全体も多項式となり、積分式が展開できるとしている。しかし、テーラー展開される関数の n 階微分の一般形は明らかにされていない。つまり、この場合の積分式を一般的な形で展開するには至っていない。

本稿では、ネットワーク空間における施設利用者の分布が多項式によって表される場合であっても、施設需要の大きさを表す積分式を一般的な形に展開できることを示す。

2. ネットワーク空間における施設需要推定法

まずは、奥貫ら [1] におけるネットワーク空間における施設需要推定法をまとめておこう。

ネットワーク空間 S 上に n_s 個の施設が立地しているとする。施設 m の魅力度を A_m 、地点 $\mathbf{x}$ から施設 m までのネットワーク距離を $d_m(\mathbf{x})$ 、地点 $\mathbf{x}$ における施設利用者密度を $w(\mathbf{x})$ とする。地点 $\mathbf{x}$ における利用者の施設 j を選択する確率 $P_j(\mathbf{x})$ は、以下のモデルによって決まるとする。

$$P_j(\mathbf{x}) = \frac{A_j \exp(-\lambda d_j(\mathbf{x}))}{\sum_{m=1}^{n_s} A_m \exp(-\lambda d_m(\mathbf{x}))} \tag{1}$$

つまり、利用者の確率的選択行動は、発生制約型の空間的相互作用モデル [2] にしたがうものとする。なお、式(1) における λ はパラメータである。

以上のようにすると、施設 j に対する需要 T_j は、以下の式で推定される。

$$T_j = \int_S \frac{A_j \exp(-\lambda d_j(\mathbf{x}))}{\sum_{m=1}^{n_s} A_j \exp(-\lambda d_m(\mathbf{x}))} w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{2}$$

この積分を展開するために、以下のようにネットワークを区分する。

ネットワーク上に一点を取り、これをリンクに沿って少しだけ

* 正会員・弘前大学人文学部(Hirosaki University, Faculty of Humanities)

動かしたとする。すると、“基本的には”、n_s 個の中のいくつかの施設に対しては近づいてゆき、残りの施設からは離れていく（ここで、“基本的には”と書いた理由は、すぐ後に説明する）。動かす量を大きくしていくと、近づいていく施設の集合と離れていく施設の集合に変化が生じる点をまたぐか、あるいは、ネットワークのノードに達する。近づいていく施設の集合と離れていく施設の集合が変わる点、もしくは、ネットワークのノードを端点として持つネットワークの一部を「細分リンク」と呼ぶ（先ほど“基本的には”と書いたが、もし、“必ず”と書いたら、近づいていく施設の集合と離れていく施設の集合が変わる点を跨いで点を動かした場合には、その後に続く記述が正しくないためである）。式(2) の定積分を計算するために、ネットワークを細分リンクへと区分しておく。本稿では、詳しく触れないが、クラスカルの算法 [3] などの最短距離木を求めるアルゴリズムを利用することで、ネットワークの細分リンクへの区分は実行できる。

細分リンクの性質を使うと、ある細分リンク k から施設 j に対する需要 T_{jk} は、次のようになる。細分リンク k 上の施設利用者分布は $w_k(t)$ なる関数によって与えられるものとする。細分リンク k の両端点のうち、施設 j に近い方において $t=0$ とする。細分リンク k の長さを l_k とすると、もう一方の端点において $t=l_k$ である。両端点のうち、(施設 j と同じく) $t=0$ となる端点の方が近い施設の集合を M_{1k}、残りの施設を M_{2k} とする。施設 m から $t=0$ の点までのネットワーク距離を r_{mk} とする。$K_{k1}=\sum_{m\in M_{k1}}(A_m/A_j)\exp(-\lambda(r_{mk}-r_{jk}))$, $K_{k2}=\sum_{m\in M_{k2}}(A_m/A_j)\exp(-\lambda(r_{mk}-r_{jk}))$ とすると、

$$T_{jk}=\int_0^{l_k}\frac{1}{K_{k1}+K_{k2}\exp(2\lambda t)}w_k(t)dt \qquad (3)$$

となる。

$T_j=\sum_k T_{jk}$ だから、式(3) の右辺の積分式が展開できるのであれば、ネットワーク空間 S 全体から施設 j への需要を推定することができる。奥貫ら [1] では、$w_k(t)$ が（区分的に）定数関数のときに、式(3)の右辺を展開した形を示している。しかし、その他の場合については、この積分式を展開した形を示していない。以下のように、被積分関数の一部をテーラー展開すればよいという見通しを述べているに留まっている。

今、$w_k(t)$ は N'_k 次の多項式によって与えられているものとしよう。

$$w_k(t)=\sum_{N_k=0}^{N'_k}a_{N_k}t^{N_k} \qquad (4)$$

ここで、

$$g_k(t)=\frac{1}{K_{k1}+K_{k2}\exp(2\lambda t)} \qquad (5)$$

とする。すると、式(3) の右辺における被積分関数は、$w_k(t)g_k(t)$ と書ける。テーラー展開によって、$g_k(t)$ を t の多項式として近似すれば、被積分関数 $w_k(t)g_k(t)$ は（多項式同士の積だから）やはり多項式となり、そして積分式が展開できるという見通しは確かに成り立つ。ただし、$g_k(t)$ の n 階微分の一般形は明らかではなく、式(3)の定積分を一般的な形で展開するには至っていない。

3. 細分リンクからの需要を推定する積分式の無限級数への展開

この章では、$g_k(t)$ を t の多項式としてではなく、指数関数の級数として表すことで、式(3)の積分式を一般的な形で展開していく。そのために、いくつか準備しておこう。

$1/(1+x)$ をマクローリン展開すると、

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad (6)$$

となる。ただし、式(6)は、

$$|x|<1 \qquad (7)$$

の範囲で成立する。

式(6) の両辺に x を乗じると、

$$\frac{x}{1+x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad (8)$$

となる。

以上の準備を踏まえ、さらに、K_{k1}, K_{k2}, l_k の値や大小関係に応じて場合分けして、T_{jk} を表す積分式（式(3)）を展開する。

<u>Case A</u> $K_{k1}<K_{k2}$ の場合

$0\le t\le l_k$ の範囲で $\exp(-2\lambda t)\le 1$ であり、$K_{k1}<K_{k2}$ より $K_{k1}/K_{k2}<1$ である。したがって、$(K_{k1}/K_{k2})\exp(-2\lambda t)<1$ となる。そこで、式(6)において $x=(K_{k1}/K_{k2})\exp(-2\lambda t)$ として、

$$
\begin{aligned}
g_k(t) &= \frac{1}{K_{k1}+K_{k2}\exp(2\lambda t)} \\
&= \frac{1}{K_{k1}} \frac{(K_{k1}/K_{k2})\exp(-2\lambda t)}{(K_{k1}/K_{k2})\exp(-2\lambda t)+1} \\
&= -\frac{1}{K_{k1}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left((K_{k1}/K_{k2}) \exp(-2\lambda t) \right)^n \\
&= -\frac{1}{K_{k1}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{K_{k1}}{K_{k2}} \right)^n \exp(-2\lambda n t) \\
&= -\frac{1}{K_{k1}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{K_{k1}}{K_{k2}} \right)^n \exp(-2\lambda n t)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

となる。したがって、

$$
\begin{aligned}
&T_{jk} \\
&= -\frac{1}{K_{k1}} \int_0^{l_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{N_k=0}^{N'_k} a_{N_k} t^{N_k} \left(-\frac{K_{k1}}{K_{k2}} \right)^n \exp(-2\lambda n t) dt \\
&= -\frac{1}{K_{k1}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{N_k=0}^{N'_k} \int_0^{l_k} a_{N_k} \left(-\frac{K_{k1}}{K_{k2}} \right)^n t^{N_k} \exp(-2\lambda n t) dt \\
&= -\frac{1}{K_{k1}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{N_k=0}^{N'_k} \left[a_{N_k} \left(-\frac{K_{k1}}{K_{k2}} \right)^n \frac{\exp(-2\lambda n t)}{(-2\lambda n)} \times \sum_{r=0}^{N_k} (-1)^r \frac{N_k! t^{N_k - r}}{(N_k - r)!(-2\lambda n)^r} \right]_0^{l_k} \\
&= \frac{1}{K_{k1}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\lambda n} \left(-\frac{K_{k1}}{K_{k2}} \right)^n \times \sum_{N_k=0}^{N'_k} a_{N_k} \left\{ \exp(-2\lambda n l_k) \times \sum_{r=0}^{N_k} \frac{N_k! l_k^{N_k - r}}{(N_k - r)!(2\lambda n)^r} - \frac{N_k!}{(2\lambda n)^{N_k}} \right\} \right\}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

となる。なお、ここで、

$$
\int x^n \exp(ax) dx = \frac{\exp(ax)}{a} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{n! x^{n-r}}{(n-r)! a^r} + C
\tag{11}
$$

である（C は積分定数）ことを用いている[4]。

<u>**Case B**</u> $K_{k1} = K_{k2}$ の場合

$0 < t \le l_k$ の範囲では、$\exp(-2\lambda t) < 1$ である。したがって、式(6)において $x = \exp(-2\lambda t)$ とすると、この t の範囲では、

$$
\begin{aligned}
g_k(t) &= \frac{1}{K_{k1}+K_{k1}\exp(2\lambda t)} \\
&= \frac{1}{K_{k1}} \frac{\exp(-2\lambda t)}{1+\exp(-2\lambda t)} \\
&= -\frac{1}{K_{k1}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(-2\lambda n t)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

となる。

ε を正数とし、また、

$$
T'_{jk} = \int_{\varepsilon}^{l_k} \left(\sum_{N_k=0}^{N'_k} a_{N_k} t^{N_k} \right) g_k(t) dt
\tag{13}
$$

とする。

式(12)の級数展開を用いると

$$
\begin{aligned}
&T'_{jk} \\
&= -\frac{1}{K_{k1}} \int_{\varepsilon}^{l_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{N_k=0}^{N'_k} a_{N_k} t^{N_k} (-1)^n \exp(-2\lambda n t) dt \\
&= -\frac{1}{K_{k1}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{N_k=0}^{N'_k} \left[a_{N_k} (-1)^n \frac{\exp(-2\lambda n t)}{(-2\lambda n)} \times \sum_{r=0}^{N_k} (-1)^r \frac{N_k! t^{N_k - r}}{(N_k - r)!(-2\lambda n)^r} \right]_{\varepsilon}^{l_k} \\
&= \frac{1}{K_{k1}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{2\lambda n} \times \sum_{N_k=0}^{N'_k} a_{N_k} \left\{ \begin{array}{l} \exp(-2\lambda n l_k) \\ \times \displaystyle\sum_{r=0}^{N_k} \frac{N_k! l_k^{N_k - r}}{(N_k - r)!(2\lambda n)^r} \\ -\exp(-2\lambda n \varepsilon) \\ \times \left\{ \dfrac{N_k!}{(2\lambda n)^{N_k}} + \displaystyle\sum_{r=0}^{N_k - 1} \frac{N_k! \varepsilon^{N_k - r}}{(N_k - r)!(2\lambda n)^r} \right\} \end{array} \right\} \right\}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

となる。$\varepsilon \to +0$ としたときのT'_{jk} の極限をとれば、

$$T_{jk} = \lim_{\varepsilon \to +0} T'_{jk}$$

$$= \frac{1}{K_{k1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\lambda n} \sum_{N_k=0}^{N'_k} a_{N_k} \left\{ \begin{array}{l} \exp(-2\lambda n l_k) \\ \times \sum_{r=0}^{N_k} \frac{N_k! l_k^{N_k-r}}{(N_k-r)!(2\lambda n)^r} \\ -\frac{N_k!}{(2\lambda n)^{N_k}} \end{array} \right\} \tag{15}$$

となる。

Case C $K_{k1} > K_{k2}$ の場合

$(K_{k2}/K_{k1})\exp(2\lambda t) < 1$ という不等式を変形していくと、$t < (1/2\lambda)\log(K_{k1}/K_{k2})$ となる。したがって、$v = (1/2\lambda)\log(K_{k1}/K_{k2})$ とおくと、$0 \le t < v$ の範囲では、

$$\begin{aligned} g_k(t) &= \frac{1}{K_{k1} + K_{k2}\exp(2\lambda t)} \\ &= \frac{1}{K_{k1}} \frac{1}{1 + (K_{k2}/K_{k1})\exp(2\lambda t)} \\ &= \frac{1}{K_{k1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-(K_{k2}/K_{k1})\exp(2\lambda t))^n \\ &= \frac{1}{K_{k1}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{K_{k2}}{K_{k1}}\right)^n \exp(2\lambda nt) \\ &= \frac{1}{K_{k1}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{K_{k2}}{K_{k1}}\right)^n \exp(2\lambda nt) \right\} \end{aligned} \tag{16}$$

となる (式(6)において、$x = (K_{k2}/K_{k1})\exp(2\lambda t)$ とした)。

一方、$t > v$ の範囲について考えると、この (t の範囲を表す) 不等式と $(K_{k1}/K_{k2})\exp(-2\lambda t) < 1$ は同値である。したがって、この範囲では、$g_k(t)$ に関して、式(9)の級数展開が成り立つ。v という値を境にして $g_k(t)$ に関して成り立つ級数展開が異なるので、式(3)の右辺の定積分における上限 l_k と v との大小関係に応じて、$K_{k1} > K_{k2}$ という場合をさらに場合分けして考えていく。

Case C-1 $l_k < v$ の場合

式(16)の級数展開を用いて、

$$\begin{aligned} T_{jk} &= \frac{1}{K_{k1}} \int_0^{l_k} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{N_k=0}^{N'_k} a_{N_k} t^{N_k} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{N_k=0}^{N'_k} a_{N_k} t^{N_k} \left(-\frac{K_{k2}}{K_{k1}}\right)^n \exp(2\lambda nt) \end{array} \right\} dt \\ &= \frac{1}{K_{k1}} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{N_k=0}^{N'_k} \int_0^{l_k} a_{N_k} t^{N_k} dt + \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{N_k=0}^{N'_k} \int_0^{l_k} a_{N_k} \left(-\frac{K_{k2}}{K_{k1}}\right)^n t^{N_k} \exp(2\lambda nt) dt \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{K_{k1}} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{N_k=0}^{N'_k} \left[\frac{a_{N_k}}{N_k+1} t^{N_k+1} \right]_0^{l_k} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{N_k=0}^{N'_k} \left[\begin{array}{l} a_{N_k} \left(-\frac{K_{k2}}{K_{k1}}\right)^n \frac{\exp(2\lambda nt)}{2\lambda n} \\ \times \sum_{r=0}^{N_k} (-1)^r \frac{N_k! t^{N_k-r}}{(N_k-r)!(2\lambda n)^r} \end{array} \right]_0^{l_k} \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{K_{k1}} \sum_{N_k=0}^{N'_k} \frac{a_{N_k}}{N_k+1} l_k^{N_k+1} \\ &\quad + \frac{1}{K_{k1}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\lambda n} \left(-\frac{K_{k2}}{K_{k1}}\right)^n \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{N_k=0}^{N'_k} a_{N_k} \left\{ \begin{array}{l} \exp(2\lambda n l_k) \\ \times \sum_{r=0}^{N_k} \frac{N_k! l_k^{N_k-r}}{(N_k-r)!(-2\lambda n)^r} \\ -\frac{N_k!}{(-2\lambda n)^{N_k}} \end{array} \right\} \right\} \end{aligned} \tag{17}$$

となる。

<u>Case C-2</u> $l_k = v$ の場合

ε_1 を正数とし、

$$T''_{jk} = \int_0^{v-\varepsilon_1} \left(\sum_{N_k=0}^{N'_k} a_{N_k} t^{N_k} \right) g_k(t)dt \qquad (18)$$

とする。ここで、$\varepsilon_1 \to +0$ として、

$$\begin{aligned} T_{jk} &= \lim_{\varepsilon_1 \to +0} T''_{jk} \\ &= \frac{1}{K_{k1}} \sum_{N_k=0}^{N'_k} \frac{a_{N_k}}{N_k+1} v^{N_k+1} \\ &\quad + \frac{1}{K_{k1}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\lambda n} \left(-\frac{K_{k2}}{K_{k1}} \right)^n \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{N_k=0}^{N'_k} a_{N_k} \left\{ \begin{array}{l} \exp(2\lambda n v) \\ \times \displaystyle\sum_{r=0}^{N_k} \frac{N_k! v^{N_k-r}}{(N_k-r)!(-2\lambda n)^r} \\ -\dfrac{N_k!}{(-2\lambda n)^{N_k}} \end{array} \right\} \right\} \end{aligned} \qquad (19)$$

となる。

<u>Case C-3</u> $l_k > v$ の場合

ε_2 を正数とし

$$T'''_{jk} = \int_{v-\varepsilon_2}^{l_k} \left(\sum_{N_k=0}^{N'_k} a_{N_k} t^{N_k} \right) g_k(t)dt \qquad (20)$$

とする。このとき、$\varepsilon_1 \to +0$ としたときの T''_{jk} の極限と $\varepsilon_2 \to +0$ としたときの T'''_{jk} の極限の和を考えると、

$$\begin{aligned} T_{jk} &= \lim_{\varepsilon_1 \to +0} T''_{jk} + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} T'''_{jk} \\ &= \frac{1}{K_{k1}} \sum_{N_k=0}^{N'_k} \frac{a_{N_k}}{N_k+1} v^{N_k+1} \\ &\quad + \frac{1}{K_{k1}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\lambda n} \left(-\frac{K_{k2}}{K_{k1}} \right)^n \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{N_k=0}^{N'_k} a_{N_k} \left\{ \begin{array}{l} \exp(2\lambda n v) \\ \times \displaystyle\sum_{r=0}^{N_k} \frac{N_k! v^{N_k-r}}{(N_k-r)!(-2\lambda n)^r} \\ -\dfrac{N_k!}{(-2\lambda n)^{N_k}} \end{array} \right\} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{K_{k1}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\lambda n} \left(-\frac{K_{k1}}{K_{k2}} \right)^n \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{N_k=0}^{N'_k} a_{N_k} \left\{ \begin{array}{l} \exp(-2\lambda n l_k) \\ \times \displaystyle\sum_{r=0}^{N_k} \frac{N_k! l_k^{N_k-r}}{(N_k-r)!(2\lambda n)^r} \\ -\exp(-2\lambda n v) \\ \times \displaystyle\sum_{r=0}^{N_k} \frac{N_k! v^{N_k-r}}{(N_k-r)!(2\lambda n)^r} \end{array} \right\} \right\} \end{aligned} \qquad (21)$$

となる。

4. まとめと本稿の成果の応用可能性

以上みてきたように、いささか煩雑な場合分けが必要ではあるが、細分リンク上の施設利用者分布が多項式で表される場合であっても、その細分リンクから特定の施設に対する需要を表す積分式を展開することができる。具体的には、式(10), (15), (17), (19), (21) のいずれかの形に展開されるが、本稿の記法では、n を添え字とする無限級数となっている。実際のネットワークにおいて、これらの式を用いて（特定の施設に対する）需要推定を行う場合には、最初の何項かの和をとることとなる（無論、なるべく多くの項を用いるほど、求められて然るべき積分値に近い値が得られる）。

最後に、本稿で得られた結果の応用について述べておく。第一に、細分リンク上の施設利用者分布を表す関数が定数関数でも多項式でない場合であっても、T_{jk} を表す積分式が展開できる場合があることが容易に分かる。具体的に言うと、$g_k(t)$ が指数関数の級数に展開されることから、利用者分布を表す関数 $w_k(t)$ が三角関数や指数関数であっても、積分式が展開できることが分かる。第二に、需要を最大化する新規施設立地点を求め

るのに、本稿で導いた展開式が利用できると期待される。奥貫[5]では、ネットワーク空間上での施設利用者分布が（区分的に）定数関数で表されるときに、施設に対する需要推定量を表す積分式が展開でき、この展開されたものは立地点の関数であることを踏まえて、非線形計画法を用いて最適立地点を見出す方法を示している。これと同様にして、ネットワーク上での施設利用者分布が多項式、三角関数、指数関数で与えられる場合においても（需要推定量を表す積分式が展開できるので）、最適立地点を見出す方法が構成できるかと期待される。

参考文献
1) 奥貫　圭一、岡部　篤行（1996）「空間相互作用モデルを用いた道路ネットワークにおける店舗売上げ推定法」，都市計画論文集，31，49-54.
2) 石川　義孝（1988）空間的相互作用モデル－その系譜と体系－，地人書房（京都）.
3) Kruskal, J.B. (1956) On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem, Proceedings of the American Mathematical Society, 7(1), 48–50.
4) 森口　繁一、宇田川　銈久、一松　信（1956）岩波 数学公式 I，岩波書店（東京）.
5) 奥貫　圭一（1997）都市施設システムの最適配置問題に関する研究，東京大学大学院工学系研究科都市工学専攻博士論文.