公益社団法人日本都市計画学会 都市計画報告集 No.11, 2012 年 11 月
Reports of the City Planning Institute of Japan, No.11, November, 2012

ネットワーク空間における発生制約型空間的相互作用モデルにしたがう施設利用者の総便益

The total benefit of facility users under a certain configuration of facilities in a network space when the choice behavior of the facility users follows an origin-constrained spatial interaction model

増山　篤*
Atsushi Masuyama

This paper derives an analytical expression of the total benefit of facility users under the following conditions: (i) the behavior of facility users follows an origin-constrained spatial interaction model, and (ii) the distribution of facility users in a network space is represented by polynomials. We first represent the total benefit of facility users in a network as a definite integral. We then demonstrate that a part of integrand in the definite integral, which is the natural log of the accessibility, can be represented by the infinite series of exponential functions and that the analytical expression of the total benefit is derived based on the infinite series.

Keywords: total benefit of facility users, spatial interaction model, network space
総便益、空間的相互作用モデル、ネットワーク空間

1. はじめに

公的サービスを提供するものから物的財を販売するものまで、私たちの周辺にはさまざまな施設が存在している。これら施設は、私たちが暮らしを営む上で重要であり、それゆえ、施設配置の良し悪しを然るべき方法で定量化し、評価することも重要である。

私たちが各種施設をどのように利用しているか考えてみると、(同一種類の) 施設が複数存在するとき、それら施設のごく一部を利用するというよりも、時と場合に応じて確率的に選択して利用している。よく知られているように、こうした確率的選択行動を記述するモデルがいくつかあり、中でも代表的なものとして、空間的相互作用モデル[1] がある。特に、利用者個々人の施設全体に対する需要が一定と考えられる場合に対しては、発生制約型の空間的相互作用モデルがある。以下では、特に断りのない限り、単に「空間的相互作用モデル」と書いたとき、発生制約型モデルを指すことにする。

施設利用者の行動が空間的相互作用モデルにしたがうものとすると、ある一人の施設利用者が（これら施設を利用することによって）受ける便益は、一般的にアクセシビリティと解される量の対数をとったものとされる[2, 3]。すると、このように表される便益をすべての施設利用者について足し合わせて全施設利用者の総便益を求めると、それによって施設配置の良し悪しを定量化および評価できる。以下では、特に断りのない限り「総便益」と書いたときに、今しがた述べたものを指すことにする。

Beaumont[4] は、二次元平面上において施設利用者は離散的に分布し、また、利用者と施設との間の距離は直線距離で定義されるとしたときに、総便益を最大化する施設配置問題の解法と最適解の例を示している。また、Williams et al.[5] は、やはり二次元平面上において施設利用者は離散的に分布し、また、利用者と施設との間の距離は直線距離で定義されるとしたときに、総便益を最大化する施設の配置と規模を求める問題の解法と最適解の例を示している。また、岸本[6] では、施設容量に上限があるものとして、Beaumont[4] の研究の拡張を行っている。ただし、二次元平面上に利用者が離散的に分布しており、また、施設までの距離を直線距離で定義しているという点では、Beaumont[4] や Williams et al.[5] と同様である。しかし、こうした施設利用者分布および施設までの距離に関する仮定は、いささか現実にそぐわない。

まず、現実に施設利用者が存在するのはごく限られた離散点上に存在するということはなく、むしろ、至るところに存在していることから、施設利用者の分布は離散的分布ではなく連続的分布として捉える方が現実に即しているとも考えられる。また、私たちの移動行動のかなりの部分は、道路ネットワークによって規定されている。そのため、二次元平面をネットワーク空間で置き換え、施設までの距離もネットワーク上の最短距離とする方が現実に即している。

こうした、より現実に即した仮定の下での総便益を計算するとしよう。施設利用者の分布が連続的分布であるすれば、総便益は定積分によって表されることになる。そして一見したところ、この定積分については、一般的な解析的表現もなければ、具体的場面においてその積分値を数値的に求めることも困難かと思われる。そのように思われる理由として、第一に、任意の地点について、そこからあらゆる施設へのネットワーク距離が必要となるということが挙げられる。第二に、被積分関数はいかにも複雑になることが挙げられる。しかし、第一の理由に関して言えば、ネットワークを適

* 正会員・弘前大学人文学部(Hirosaki University, Faculty of Humanities)

切にリンクへと区分することで、ネットワーク距離の扱いを容易にすることができる。第二の理由に関して言えば、確かに被積分関数がそのままの形である限り、この定積分に対する解析的表現を導くのは不可能かとも思われる。しかし、後に示すように、テーラー展開を用いて被積分関数の一部を変形すれば、この定積分を無限級数として解析的に表すことができる。この級数の初項からいくつかの項までの和をとると、総便益の近似値が得られる。要するに、この段落の最初で述べた想像とは異なり、総便益を表す定積分に対する一般的な解析的表現は存在し、そして、近似的にではあるが具体的場面における積分値も比較的簡便に計算しうる。

ネットワーク空間上に連続的に分布する施設利用者が空間的相互作用モデルにしたがうとしたときに、総便益を最大化する施設配置を求める研究などはこれまで見られなかった。しかし、総便益に対する解析的表現やそれに基づく積分値計算によって、こうした施設配置問題などへもアプローチできるようになると期待される。

本稿では、ネットワーク空間に連続に施設利用者が分布し、施設利用者は空間的相互作用モデルにしたがうとしたときの総便益に対する解析的表現を導く。まず、一般にアクセシビリティと解される量の対数が施設利用者の便益というべき量であることを述べ、総便益を定積分として表す。次に、ネットワークをリンクの集合へ細分化する。そして、細分化されたリンク毎に施設利用者便益の解析的表現を導く。

2. ネットワーク空間における総便益の定積分による定式化

ネットワーク空間S上にp個の施設が立地しているとする。これら施設を要素とする集合をMとする。施設mの魅力度をA_m、地点$\mathbf{x}$から施設mまでのネットワーク距離を$d_m(\mathbf{x})$、地点$\mathbf{x}$における施設利用者密度を$w(\mathbf{x})$とする。地点$\mathbf{x}$における利用者の施設jを選択する確率$P_j(\mathbf{x})$とし、S上のすべての施設利用者は、空間的相互作用モデルにしたがって施設を選択して利用するものとする。つまり

$$P_j(\mathbf{x}) = \frac{A_j{}^{\alpha} \exp(-\lambda d_j(\mathbf{x}))}{\sum_{m=1}^{p} A_m{}^{\alpha} \exp(-\lambda d_m(\mathbf{x}))} \quad (1)$$

とする。

この式(1)の右辺の分母に現れる$\sum^{p} A_m{}^{\alpha} \exp(-\lambda d_m(\mathbf{x}))$は、しばしば地点$\mathbf{x}$（の施設利用者）のアクセシビリティと解される。また、式(1)のλとαはパラメータであるが、それぞれ次のような意味合いを持つ。まず、λは距離に応じてアクセシビリティがどのように変わるかを決めるパラメータである。また、αは、その値が1を超えて大きいほど、施設利用者は魅力度の高い施設をその魅力度に比例する以上に高い確率で選択することになる。

地点$\mathbf{x}$のアクセシビリティの対数を取り、λで除したものを$b(\mathbf{x})$とする。つまり、

$$b(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda} \ln \sum_{m=1}^{p} A_m{}^{\alpha} \exp(-\lambda d_m(\mathbf{x})) \quad (2)$$

とする。一般に、この$b(\mathbf{x})$は地点$\mathbf{x}$の（一人の）施設利用者が受ける便益を表しているとされる。まず、経済学における消費者余剰に対応している[2), 3)]。また、式(1)で表される確率的選択行動はランダム効用理論から導くことができるが、このときの最大効用の期待値（に定数を加減算したもの）でもある[7)]。したがって、$w(\mathbf{x})b(\mathbf{x})$をネットワーク空間$S$全体に渡って積分することで、総便益が求められる。つまり、総便益をBとすると、

$$\begin{aligned} B &= \int_S w(\mathbf{x}) b(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_S w(\mathbf{x}) \ln \sum_{m=1}^{p} A_m{}^{\alpha} \exp(-\lambda d_m(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3)$$

となる。

この定積分に対する解析的表現を導くにせよ、数値積分によって積分値を求めるにせよ、任意の地点$\mathbf{x}$について、すべての施設へのネットワーク距離$d_1(\mathbf{x}), d_2(\mathbf{x}), \ldots, d_p(\mathbf{x})$が必要となる。言うまでもなく、あらゆる地点$\mathbf{x}$において、（ダイクストラ法などを用いて）ネットワーク距離計算を行うというのは現実的ではない。しかし、奥貫ら[8)]が行っているように、ネットワークをリンクの集合へと細分化することで、ネットワーク距離の扱いは容易となる。次の章では、ネットワーク距離の扱いが容易となるようにネットワークを細分化し、リンク毎にその上に分布する施設利用者の便益（の合計）に対する解析的表現を導く。そして、これらの和を取ることで、総便益に対する解析的表現が存在することを示す。

3. ネットワークのリンクへの区分とそれに基づく総便益の解析的表現の導出

3-1. ネットワークのリンクへの区分と区分されたリ

ンク上の施設利用者の便益の合計

今、ネットワーク上に一点を取り、これをネットワークに沿って少しだけ動かしたとする。このとき、p 個の中のいくつかの施設に対しては近づいてゆき、残りの施設からは離れていく。動かす量を大きくしていくと、ある点を跨いだところで、近づいていく施設の集合と離れていく施設の集合に変化が生じるか、ネットワークのノードに達する。近づいていく施設の集合と離れていく施設の集合が変わる点、もしくは、ネットワークのノードを端点として持つリンクを「細分リンク」と呼ぶ。このような細分リンクを考えると、細分リンク上の任意の点からすべての施設へのネットワーク距離を媒介変数によって表すことができ、ネットワーク距離の扱いが容易となる。

施設の集合M を、細分リンクk の両端点のうちの一方に近いものと他方に近いものへと二つの部分集合に分ける。このうちの少なくとも一方の部分集合は空集合ではないが、どちらも空集合ではない場合、どちらか一方をM_{k1}、他方をM_{k2} とする（どちらをM_{k1} として、どちらをM_{k2} しても差し支えない）。一方が空集合の場合、空集合ではない方をM_{k1}、他方（空集合）をM_{k2} とする。細分リンクk の両端点のうちM_{1k}（に属する施設）に近い方において$t_k=0$ とし、他方の端点において$t_k=l_k$ として、細分リンク上の任意の点を媒介変数t_k で表すことにする。施設m から$t_k=0$ の点までのネットワーク距離をr_{mk} とする。細分リンクk 上の点t_k から施設m までの距離を$d_m^k(t_k)$ とすると、細分リンクの定義から、$m\in M_{k1}$ であれば$d_m^k(t_k)=r_{mk}+t_k$ であり、$m\in M_{k2}$ であれば$d_m^k(t_k)=r_{mk}-t_k$ である。このように、ネットワーク空間を細分リンクへと区分することで、ネットワーク距離の扱いが容易となる。なお、細分リンクへの区分は、次のようにして実行される。まず、一つの施設（を表すノード）から最短経路木を発生させる。すると、ネットワークのリンクは、最短経路木に含まれるものと含まれないものに分けられる。ここで、最短経路木に含まれないリンクについては、それらの上には、複数経路のどちらを経由したとしても、施設から等距離となる点が存在する。先行研究では、こうした点は「衝突点」と呼ばれているが、まずは、一つの施設に関する衝突点をすべて求める。以下、どの施設に関しても衝突点を求め、それらすべての衝突点を元のネットワークにノードとして加える。このようにして新しくできるネットワークが細分リンクの端点となる。つまり、新しくできるネットワークをすべてのノードにおいて切断すると、ネットワーク空間の細分リンクへの区分となる。

今述べたようにして、ネットワーク空間を細分リンクへと区分したとする。ある細分リンクk 上に分布する施設利用者の便益の合計をB_k と表すことにしよう。もちろん、このB_k も定積分によって表されるが、具体的には、以下のようになる。なお、当然のことだが、細分リンクの本数をq とすると、$B=\sum_{k=1}^{q}B_k$ である。

$K_{k1}=\sum_{m\in M_{k1}}A_m^{\ \alpha}\exp(-\lambda r_{mk})$，$K_{k2}=\sum_{m\in M_{k2}}A_m^{\ \alpha}\exp(-\lambda r_{mk})$ とする。すると、細分リンクk 上の地点t_k における（一人の）施設利用者の便益$b_k(t_k)$ は、

$$b_k(t_k)=\frac{1}{\lambda}\ln\left(K_{k1}\exp(-\lambda t_k)+K_{k2}\exp(\lambda t_k)\right) \quad (4)$$

となる。なお、M_{k2} が空集合のとき、$K_{k2}=0$ となる。

細分リンクk 上の施設利用者密度を表す関数を$w_k(t_k)$ とし、以下のように、$w_k(t_k)$ はz_k 次の多項式によって与えられているものとしよう。

$$w_k(t_k)=\sum_{N=0}^{z_k}a_{kN}t_k^{\ N} \quad (5)$$

すると、細分リンクk の施設利用者全体の便益B_k は、以下のように

$$\begin{aligned}B_k&=\int_0^{l_k}w_k(t_k)b_k(t_k)dt_k\\&=\frac{1}{\lambda}\int_0^{l_k}\left(\sum_{N=0}^{z_k}a_{kN}t_k^{\ N}\right)\ln\begin{pmatrix}K_{k1}\exp(-\lambda t_k)\\+K_{k2}\exp(\lambda t_k)\end{pmatrix}dt_k\end{aligned} \quad (6)$$

として表される。

$B=\sum_{k=1}^{q}B_k$ であるから、B_k を解析的に表すことができれば、総便益B も解析的に表すことができる。以下に示すように、いくつかの場合に分ける必要があるが、B_k を表す不定積分を解析的に表すことができる。それぞれに場合ついてみていこう。

3-2. 細分リンク総便益に対する解析的表現

この節では、B_k に対する解析的表現を導くが、その際には、いくつか場合に分けて考える必要がある。まずは、M_{k2} が空集合であるかどうかによって場合に分け、空集合でない場合については、さらに場合に分ける必要がある。以下では、それぞれの場合についてみていこう。

Case 1　M_{k2} が空集合の場合

M_{k2} が空集合のとき、以下の通り、容易に B_k を表す定積分を展開できる。

$$
\begin{aligned}
B_k &= \int_0^{l_k} w_k(t_k) b_k(t_k) dt_k \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_0^{l_k} w_k(t_k) \ln\left(K_{k1}\exp(-\lambda t_k)\right) dt_k \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_0^{l_k} w_k(t_k) \left(\ln K_{k1} - \lambda t_k\right) dt_k \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_0^{l_k} \left(\sum_{N=0}^{z_k} a_{kN} {t_k}^N\right)\left(\ln K_{k1} - \lambda t_k\right) dt_k \\
&= \frac{1}{\lambda}\sum_{N=0}^{z_k} a_{kN} {l_k}^{N+1}\left(\frac{\ln K_{k1}}{N+1} - \frac{\lambda l_k}{N+2}\right)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Case 2　M_{k2} が空集合ではない場合

M_{k2} が空集合ではない場合については、さらにいくつかの場合に分ける必要があるが、それぞれの場合毎に、B_k を無限級数として表すことができる。まずは、そのための準備をしておく。

$\ln(1+x)$ をマクローリン展開すると、

$$
\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

となる。ただし、式(8)は、

$$-1 < x \leq 1 \tag{9}$$

の範囲で成立する。

以下では、K_{k1}, K_{k2}, l_k の大小関係に応じて場合分けを行い、場合毎に B_k を表す不定積分を展開していく。

Case 2-1　$K_{k1} \leq K_{k2}$ の場合

$K_{k1} \leq K_{k2}$ の場合は以下のようになる。$0 \leq t_k \leq l_k$ の範囲で $0 < \exp(-2\lambda t_k) \leq 1$ であり、$0 < K_{k1} \leq K_{k2}$ より $0 < K_{k1}/K_{k2} \leq 1$ である。したがって、$0 < (K_{k1}/K_{k2})\exp(-2\lambda t_k) \leq 1$ となる。そこで、式(8)において $x = (K_{k1}/K_{k2})\exp(-2\lambda t_k)$ とすると、

$$
\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{K_{k1}}{K_{k2}}\exp(-2\lambda t_k) + 1\right) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{K_{k1}}{K_{k2}}\right)^n \frac{\exp(-2\lambda n t_k)}{n} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{K_{k1}}{K_{k2}}\right)^n \frac{\exp(-2\lambda n t_k)}{n}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

となる。

また、

$$
\begin{aligned}
&b_k(t_k) \\
&= \frac{1}{\lambda}\ln\left(K_{k1}\exp(-\lambda t_k) + K_{k2}\exp(\lambda t_k)\right) \\
&= \frac{1}{\lambda}\ln\left\{\left(K_{k2}\exp(\lambda t_k)\right)\left(\frac{K_{k1}}{K_{k2}}\exp(-2\lambda t_k) + 1\right)\right\} \\
&= \frac{1}{\lambda}\left\{\left(\ln K_{k2} + \lambda t_k\right) + \ln\left(\frac{K_{k1}}{K_{k2}}\exp(-2\lambda t_k) + 1\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
&B_k \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_0^{l_k}\left(\sum_{N=0}^{z_k} a_{kN} {t_k}^N\right)\begin{pmatrix} \left(\ln K_{k2} + \lambda t_k\right) \\ -\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{K_{k1}}{K_{k2}}\right)^n \frac{\exp(-2\lambda n t_k)}{n}\end{pmatrix} dt_k \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_0^{l_k}\left(\sum_{N=0}^{z_k} a_{kN} {t_k}^N\right)\left(\ln K_{k2} + \lambda t_k\right) dt_k \\
&\quad - \frac{1}{\lambda}\int_0^{l_k}\left(\sum_{N=0}^{z_k} a_{kN} {t_k}^N\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{K_{k1}}{K_{k2}}\right)^n \frac{\exp(-2\lambda n t_k)}{n} dt_k
\end{aligned}
\tag{12}
$$

となる。

式(12)の最右辺は二つの項からなる。項別にみてい

くと、この第一項は、

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda}\int_0^{l_k}\left(\sum_{N=0}^{z_k} a_{kN} t_k{}^N\right)\left(\ln K_{k2}+\lambda t_k\right)dt_k \\
&=\frac{1}{\lambda}\sum_{N=0}^{z_k}\int_0^{l_k} a_{kN}\left(\ln K_{k2} t_k{}^N+\lambda t_k{}^{N+1}\right)dt_k \\
&=\frac{1}{\lambda}\sum_{N=0}^{z_k} a_{kN}\left[\frac{\ln K_{k2}}{N+1}t_k{}^{N+1}+\frac{\lambda}{N+2}t^{N+2}\right]_0^{l_k} \\
&=\frac{1}{\lambda}\sum_{N=0}^{z_k} a_{kN} l_k{}^{N+1}\left(\frac{\ln K_{k2}}{N+1}+\frac{\lambda l_k}{N+2}\right)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

となる。一方、第二項は、

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\lambda}\int_0^{l_k}\left(\sum_{N=0}^{z_k} a_{kN} t_k{}^N\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{K_{k1}}{K_{k2}}\right)^n\frac{\exp(-2\lambda n t_k)}{n}dt_k \\
&=-\frac{1}{\lambda}\int_0^{l_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{N=0}^{z_k} a_{kN} t_k{}^N\left(-\frac{K_{k1}}{K_{k2}}\right)^n\frac{\exp(-2\lambda n t_k)}{n}dt_k \\
&=-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{N=0}^{z_k}\int_0^{l_k}\frac{a_{kN}}{n}\left(-\frac{K_{k1}}{K_{k2}}\right)^n t_k{}^N\exp(-2\lambda n t_k)dt_k \\
&=-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{N=0}^{z_k}\left[\begin{array}{l}\dfrac{a_{kN}}{n}\left(-\dfrac{K_{k1}}{K_{k2}}\right)^n\dfrac{\exp(-2\lambda n t_k)}{(-2\lambda n)} \\ \times\displaystyle\sum_{r=0}^{N}(-1)^r\frac{N!t_k{}^{N-r}}{(N-r)!(-2\lambda n)^r}\end{array}\right]_0^{l_k} \\
&=\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{2\lambda n^2}\left(-\dfrac{K_{k1}}{K_{k2}}\right)^n \\ \displaystyle\sum_{N=0}^{z_k} a_{kN}\left\{\begin{array}{l}\exp(-2\lambda n l_k)\displaystyle\sum_{r=0}^{N}\frac{N!l_k{}^{N-r}}{(N-r)!(2\lambda n)^r} \\ -\dfrac{N!}{(2\lambda n)^N}\end{array}\right\}\end{array}\right\}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

となる。なお、ここで、

$$
\int x^n\exp(ax)dx=\frac{\exp(ax)}{a}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n!x^{n-r}}{(n-r)!a^r}+C
$$

（ただし、C は積分定数） (15)

であることを用いている[9]。

これら式(13), (14)から、以下のように、無限級数によって B_k を表せることが分かる。

$$
\begin{aligned}
&B_k= \\
&\frac{1}{\lambda}\sum_{N=0}^{z_k} a_{kN} l_k{}^{N+1}\left(\frac{\ln K_{k2}}{N+1}+\frac{\lambda l_k}{N+2}\right) \\
&+\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{2\lambda n^2}\left(-\dfrac{K_{k1}}{K_{k2}}\right)^n \\ \times\displaystyle\sum_{N=0}^{z_k} a_{kN}\left\{\begin{array}{l}\exp(-2\lambda n l_k) \\ \times\displaystyle\sum_{r=0}^{N}\frac{N!l_k{}^{N-r}}{(N-r)!(2\lambda n)^r}-\frac{N!}{(2\lambda n)^N}\end{array}\right\}\end{array}\right\}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Case 2-2　$K_{k1}>K_{k2}$ の場合

$K_{k1}>K_{k2}$ の場合、l_k の大きさ次第で、さらに場合分けを行う。以下では、さらに場合分けを行うこととなる理由をみていこう。

地点 t_k の一人の施設利用者の便益 $b_k(t_k)$ は、次のようにも変形される。

$$
\begin{aligned}
&b_k(t_k) \\
&=\frac{1}{\lambda}\ln\left(K_{k1}\exp(-\lambda t_k)+K_{k2}\exp(\lambda t_k)\right) \\
&=\frac{1}{\lambda}\ln\left\{\left(K_{k1}\exp(-\lambda t_k)\right)\left(1+\frac{K_{k2}}{K_{k1}}\exp(2\lambda t_k)\right)\right\} \\
&=\frac{1}{\lambda}\left\{\left(\ln K_{k1}-\lambda t_k\right)+\ln\left(1+\frac{K_{k2}}{K_{k1}}\exp(2\lambda t_k)\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$\left(K_{k2}/K_{k1}\right)\exp(2\lambda t_k)\le 1$ という不等式を変形していくと、

$$\frac{K_{k2}}{K_{k1}}\exp(2\lambda t_k)\le 1$$
$$\exp(2\lambda t_k)\le\frac{K_{k1}}{K_{k2}}$$
$$2\lambda t_k\le\ln\left(\frac{K_{k1}}{K_{k2}}\right)$$
$$t_k\le\frac{1}{2\lambda}\ln\left(\frac{K_{k1}}{K_{k2}}\right) \tag{18}$$

となる。

ここで

$$v_k=\frac{1}{2\lambda}\ln\left(\frac{K_{k1}}{K_{k2}}\right) \tag{19}$$

とする。

$0\le t_k\le v_k$ の範囲では、式(8)において $x=(K_{k2}/K_{k1})\exp(2\lambda t_k)$ として、

$$\begin{aligned}&\ln\left(1+\frac{K_{k2}}{K_{k1}}\exp(2\lambda t_k)\right)\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{K_{k2}}{K_{k1}}\right)^n\frac{\exp(2\lambda n t_k)}{n}\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{K_{k2}}{K_{k1}}\right)^n\frac{\exp(2\lambda n t_k)}{n}\end{aligned} \tag{20}$$

となる。逆に、$t_k\ge v_k$ の範囲では、式(10)の級数展開が成立する。

ここまでみてきたことから分かるように、v_k という値を境にして、$b_k(t_k)$ は異なる形に級数展開される。そこで、l_k と v_k の大小関係に応じて、この Case 2-2（$K_{k1}>K_{k2}$ となる場合）をさらに場合分けして考えていく。

<u>Case 2-2-1</u> $l_k\le v_k$ の場合

$0\le t_k\le v_k$ の範囲で、式(20)の級数展開が成り立つが、$l_k\le v_k$ であれば、当然、$0\le t_k\le l_k$ の範囲でもこの級数展開は成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned}&B_k\\&=\frac{1}{\lambda}\int_0^{l_k}\left(\sum_{N=0}^{z_k}a_{kN}t_k{}^N\right)\left(\begin{aligned}&(\ln K_{k1}-\lambda t_k)\\&-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{K_{k2}}{K_{k1}}\right)^n\frac{\exp(2\lambda n t_k)}{n}\end{aligned}\right)dt_k\\&=\frac{1}{\lambda}\int_0^{l_k}\left(\sum_{N=0}^{z_k}a_{kN}t_k{}^N\right)(\ln K_{k1}-\lambda t_k)dt_k\\&-\frac{1}{\lambda}\int_0^{l_k}\left(\sum_{N=0}^{z_k}a_{kN}t_k{}^N\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{K_{k2}}{K_{k1}}\right)^n\frac{\exp(2\lambda n t_k)}{n}dt_k\end{aligned} \tag{21}$$

となる。

式(21)最右辺の第一項は、

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\lambda}\int_0^{l_k}\left(\sum_{N=0}^{z_k}a_{kN}t_k{}^N\right)(\ln K_{k1}-\lambda t_k)dt_k\\&=\frac{1}{\lambda}\sum_{N=0}^{z_k}\int_0^{l_k}a_{kN}\left(\ln K_{k1}t_k{}^N-\lambda t_k{}^{N+1}\right)dt_k\\&=\frac{1}{\lambda}\sum_{N=0}^{z_k}a_{kN}\left[\frac{\ln K_{k1}}{N+1}t_k{}^{N+1}-\frac{\lambda}{N+2}t_k{}^{N+2}\right]_0^{l_k}\\&=\frac{1}{\lambda}\sum_{N=0}^{z_k}a_{kN}l_k{}^{N+1}\left(\frac{\ln K_{k1}}{N+1}-\frac{\lambda l_k}{N+2}\right)\end{aligned} \tag{22}$$

となり、第二項は、

$$-\frac{1}{\lambda}\int_0^{l_k}\left(\sum_{N=0}^{z_k} a_{kN} t_k{}^N\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{K_{k2}}{K_{k1}}\right)^n \frac{\exp(2\lambda n t_k)}{n} dt_k$$

$$=-\frac{1}{\lambda}\int_0^{l_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{N=0}^{z_k} a_{kN} t_k{}^N\left(-\frac{K_{k2}}{K_{k1}}\right)^n \frac{\exp(2\lambda n t_k)}{n} dt_k$$

$$=-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{N=0}^{z_k}\int_0^{l_k}\frac{a_{kN}}{n}\left(-\frac{K_{k2}}{K_{k1}}\right)^n t_k{}^N \exp(2\lambda n t_k) dt_k$$

$$=-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{N=0}^{z_k}\left[\begin{array}{l}\dfrac{a_{kN}}{n}\left(-\dfrac{K_{k2}}{K_{k1}}\right)^n \dfrac{\exp(2\lambda n t_k)}{2\lambda n}\\ \times\displaystyle\sum_{r=0}^{N}(-1)^r\frac{N!t_k{}^{N-r}}{(N-r)!(2\lambda n)^r}\end{array}\right]_0^{l_k}$$

$$=-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{2\lambda n^2}\left(-\dfrac{K_{k2}}{K_{k1}}\right)^n\\ \times\displaystyle\sum_{N=0}^{z_k}a_{kN}\left\{\begin{array}{l}\exp(2\lambda n l_k)\\ \times\displaystyle\sum_{r=0}^{N}\frac{N!l_k{}^{N-r}}{(N-r)!(-2\lambda n)^r}\\ -\dfrac{N!}{(-2\lambda n)^N}\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

(23)

となる。これら式(21)－(23)より、

$$B_k$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sum_{N=0}^{z_k}a_{kN}l_k{}^{N+1}\left(\frac{\ln K_{k1}}{N+1}-\frac{\lambda l_k}{N+2}\right)$$

$$-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{2\lambda n^2}\left(-\dfrac{K_{k2}}{K_{k1}}\right)^n\\ \times\displaystyle\sum_{N=0}^{z_k}a_{kN}\left\{\begin{array}{l}\exp(2\lambda n l_k)\\ \times\displaystyle\sum_{r=0}^{N}\frac{N!l_k{}^{N-r}}{(N-r)!(-2\lambda n)^r}\\ -\dfrac{N!}{(-2\lambda n)^N}\end{array}\right\}\end{array}\right\} \quad (24)$$

となる。

<u>Case 2-2-2</u> $l_k > v_k$ の場合

$0 \le t_k \le v_k$ の範囲では、式(20)の級数展開が成り立つ。Case 2-2-1 における計算を踏まえると、この範囲に渡って $w_k(t_k)b_k(t_k)$ を積分したものは以下のようになる。

$$\int_0^{v_k} w(t_k)b_k(t_k)dt_k$$

$$=\frac{1}{\lambda}\int_0^{v_k}\left(\sum_{N=0}^{z_k}a_{kN}t_k{}^N\right)\left(\begin{array}{l}(\ln K_{k1}-\lambda t_k)\\ -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\begin{array}{l}\left(-\dfrac{K_{k2}}{K_{k1}}\right)^n\\ \times\dfrac{\exp(2\lambda n t_k)}{n}\end{array}\right)\end{array}\right)dt_k$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sum_{N=0}^{z_k}a_{kN}v_k{}^{N+1}\left(\frac{\ln K_{k1}}{N+1}-\frac{\lambda v_k}{N+2}\right)$$

$$-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{2\lambda n^2}\left(-\dfrac{K_{k2}}{K_{k1}}\right)^n\\ \times\displaystyle\sum_{N=0}^{z_k}a_{kN}\left\{\begin{array}{l}\exp(2\lambda n v_k)\\ \times\displaystyle\sum_{r=0}^{N}\frac{N!v_k{}^{N-r}}{(N-r)!(-2\lambda n)^r}\\ -\dfrac{N!}{(-2\lambda n)^N}\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

(25)

一方、$v_k \le t_k \le l_k$ の範囲で、式(10)の級数展開が成り立つ。Case 2-1 における計算過程を踏まえると、この範囲に渡って $w_k(t_k)b_k(t_k)$ を積分したものは以下のようになる。

$$\int_{v_k}^{l_k} w_k(t_k) b_k(t_k) dt_k$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_{v_k}^{l_k}\left(\sum_{N=0}^{z_k} a_{kN} t_k{}^N\right)\begin{pmatrix} (\ln K_{k2} + \lambda t_k) \\ -\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix} \left(-\frac{K_{k1}}{K_{k2}}\right)^n \\ \times \frac{\exp(-2\lambda n t_k)}{n}\end{pmatrix}\end{pmatrix} dt_k$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sum_{N=0}^{z_k} a_{kN} l_k{}^{N+1}\left(\frac{\ln K_{k2}}{N+1} + \frac{\lambda l_k}{N+2}\right)$$

$$+ \frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2\lambda n^2}\left(-\frac{K_{k1}}{K_{k2}}\right)^n \\ \times \sum_{N=0}^{z_k} a_{kN}\left\{\begin{array}{l} \exp(-2\lambda n l_k) \\ \times \sum_{r=0}^{N} \frac{N! l_k{}^{N-r}}{(N-r)!(2\lambda n)^r}\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

$$- \frac{1}{\lambda}\sum_{N=0}^{z_k} a_{kN} v_k{}^{N+1}\left(\frac{\ln K_{k2}}{N+1} + \frac{\lambda v_k}{N+2}\right)$$

$$- \frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2\lambda n^2}\left(-\frac{K_{k1}}{K_{k2}}\right)^n \\ \times \sum_{N=0}^{z_k} a_{kN}\left\{\begin{array}{l} \exp(-2\lambda n v_k) \\ \times \sum_{r=0}^{N} \frac{N! v_k{}^{N-r}}{(N-r)!(2\lambda n)^r}\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

(26)

ところで、

$$B_k = \int_0^{l_k} w_k(t_k) b_k(t_k) dt_k$$
$$= \int_0^{v_k} w(t_k) b_k(t_k) dt + \int_{v_k}^{l_k} w(t_k) b_k(t_k) dt_k$$

(27)

であるから、B_k は式(25)および(26)の最右辺を加えたものとなる（この二つを加えたものは、やや煩雑な式になるので、書き下すのは省略する)。

4. まとめと今後の課題

ここまでみてきたように、本稿では、ネットワーク空間に連続に施設利用者が分布し、施設利用者は空間的相互作用モデルにしたがうとしたときの総便益に対する解析的表現を導いた。

今後の課題としては、(そもそも、ここで解析的表現を導くモチベーションとして挙げた）最適施設配置問題への展開などが考えられる。

参考文献

1) 石川　義孝（1988）空間的相互作用モデル―その系譜と体系―，地人書房（京都）.
2) Neuberger, H. (1971) User Benefit in the Evaluation of Transport and Land User Plans, *Journal of Transport Economics and Policy*, 5, 52-75.
3) Williams, H.C.W.L. (1977) On the Formation of Travel Demand Models and Economic Evaluation Measures of User Benefit, *Environment and Planning A*, 9, 285-344.
4) Beaumont, J.R. (1980) Spatial Interaction Models and the Location-Allocation Problem, *Journal of Regional Science*, 20(1), 37-50.
5) Williams, H.C.W.L., Kim, K.S. and Martin, D. (1990) Location-spatial interaction models: 1. Benefit-maximizing configurations of services, *Environment and Planning A*, 22(8), 1079-1089.
6) 岸本　達也（1999）利用者数の総和を最大化する施設の最適配置モデル：空間的相互作用モデルを用いた施設配置計画その 1，日本建築学会計画系論文集，521，227-235.
7) Cochrane, R.A. (1975) A Possible Economic Basis for the Gravity Model, *Journal of Transport Economics and Policy*, 9(1), 34-49.
8) 奥貫　圭一、岡部　篤行（1996）空間相互作用モデルを用いた道路ネットワークにおける店舗売上げ推定法, 都市計画論文集，31，49-54.
9) 森口　繁一、宇田川　銈久、一松　信（1956）岩波 数学公式 I，岩波書店（東京）.